金题汇编二

一、单选题

1. $\lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}} =$ ______

A. $e^{\frac{3}{2}}$
B. $e^{\frac{2}{3}}$
C. $e^{\frac{1}{3}}$
D. e^{6}

答案：B

【解析】本题考查了函数极限的知识点

$$\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}} = \left[\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

2. 设函数 $y = x + 2\sin x$，则 dy=(　)

A. $(1-2\cos x)dx$
B. $(1+2\cos x)dx$
C. $(1-\cos x)dx$
D. $(1+\cos x)dx$

答案：B

【解析】本题考查了函数微分的知识点

$$\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}} = \left[\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

3. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2} =$ ()

A. $\dfrac{3}{2}$
B. 1
C. 2
D. $\dfrac{1}{2}$

答案：A

【解析】本题考查了函数微分的知识点 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \dfrac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \dfrac{3}{2}$

4. 设函数$f(x)=3+x^5$，则$f'(x)=$ （）

A. x^4

B. $1+x^4$

C. $\frac{1}{5}x^4$

D. $5x^4$

答案：D

【解析】本题考查了一阶导数的知识点. $f'(x)=\left(3+x^5\right)'=5x^4$

5.
设函数$f(x)=21nx$,则$f'(x)=$ ()

A. $\frac{2}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

答案：B

【解析】本题考查了二阶导函数的知识点.

$$f'(x)=(2\ln x)'=\frac{2}{x},f''(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}$$

6. $\int_{-2}^{2}(1+x)dx=$

A. 4

B. 0

C. 2

D. -4

答案：A

【解析】本题考查了牛顿一莱布尼茨公式的知识点.

$$\int_{-2}^{2}(1+x)dx=(x=\frac{1}{2}x^{2})\Big|_{-2}^{2}=4$$

7. $\int\frac{3}{x^{5}}\,\mathrm{d}x=$ ()

A. $\frac{3}{4x^{4}}+C$

B. $\frac{3}{5x^{4}}+C$

C. $-\frac{3}{4x^{4}}+C$

D. $-\frac{3}{5x^{4}}+C$

答案：C

【解析】本题考查了不定积分的知识点.

$$\int\frac{3}{x^{5}}dx=3\times\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+C=-\frac{3}{4x^{4}}+c$$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排，则 2 本英语书恰好相邻的概率为 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

答案：A

【解析】本题考查了随机事件的概率的知识点． 2 本英语书恰好相邻的概率为

$$\frac{A_4^4\cdot A_2^2}{A_5^5}=\frac{2}{5}.$$

9.

设函数$z=x^2-4y^2$,则$dz=$ ()

A. $x\,\mathrm{d}x-4y\,\mathrm{d}y$

B. $x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y$

C. $2x\,\mathrm{d}x-4y\,\mathrm{d}y$

D. $2x\,\mathrm{d}x-8y\,\mathrm{d}y$

答案：D

【解析】本题考查了全微分的知识点.

易知$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-8y,$故$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx-8ydy.$

10.

设函数$z=x^3+xy^2+3,$则$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ()

A. $3x^2+2xy$

B. $3x^2+y^2$

C. $2xy$

D. $2y$.

答案：C

【解析】本题考查了函数的偏导数的知识点 $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left(y^2\right)'=2xy$

二、简答题

1. 计算$\int x\sin xdx$

答案：

$$\begin{aligned}&\int x\sin x dx=-\int xd(\cos x)\\&=-\left(x\cos x-\int\cos x dx\right)\\&=-x\cos x+\int\cos x dx\\&=-x\cos x+\sin x+C.\end{aligned}$$

【解析】

2.

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-x^2}{2\sin^2 x}$.

答案：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-x^2}{2\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin^2 x}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

【解析】

3.

已知函数 $f(x)=e^x\cos x$, 求 $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

答案：

$$\begin{aligned}&f(x)=e^x\cos x+e^x\cdot(\cos x)'\\&=e^x\cos x-e^x\sin x\\&=e^x(\cos x-\sin x),\\&f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'\\&=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)\\&=-2e^x\sin x,\end{aligned}$$

故有 $f''(\frac{\pi}{2})=-2e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=-2e^{\frac{\pi}{2}}$.

【解析】

4. 计算$\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}dx.$

答案：

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left(2^{\frac{4}{3}}-1\right)$$

【解析】

5.

设 D 为曲线$y=\sqrt{x}$,直线$x=4,x$轴围成的有界区域．求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积．

答案：

【解析】

区域$D:0\le y\le 2, y^2\le x\le 4$，故所求旋转体的体积$=\pi\cdot 4^2\cdot 2-\int_0^2 \pi x^2 dy$

$$= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{5}\pi.$$

6. 求函数$z=x^2+2y^4+4xy^2-2x$的极值．

答案：

【解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+4y^2-2,\frac{\partial z}{\partial y}=8y^3+8xy,$

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$

得驻点为$(1,0),(-1,1),(-1,-1)$

而$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24y^2+8x,$

在$(1,0)$点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)}=2,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,0)}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,0)}=8,$

$B^2-AC=-16<0,$且$A>0,$

故函数在$(1,0)$点有极小值，$z_{极小值}=-1;$

在$(-1,1)$点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,1)}=2,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-1,1)}=8,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-1,1)}=16,$

$B^2-AC=32>0,$故点$(-1,1)$不是极值点；

在$(-1,-1)$点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,-1)}=2,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-1,-1)}=-8,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-1,-1)}=16,$

$B^2-AC=32>0,$故点$(-1,-1)$不是极值点

因此函数在$(1,0)$点有极小值，$z_{极小值}=-1.$

求曲线 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 的凹凸区间与拐点。

7.

答案：

【解析】

$y'=3x^2-6x+2,y''=6x-6,$

令$y''=0,$得$x=1.$

当$x>1$时，$y''>0,$故$(1,+\infty)$为曲线的凹区间；

当$x<1$时，$y''<0,$故$(-\infty,1)$为曲线的凸区间，

函数的拐点为$(1,1)$

已知离散型随机变量*的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

8.

求 a, b;

答案：

【解析】

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \text{由概率的性质可知} a+0.5+b=1,\\
&\text{有} E(X)=0, \text{得} -1\times a+0\times 0.5+2\times b=0,\\
&\text{故有} a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

9. 已知离散型随机变量*的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

) 求 $E[X(X+1)]$.

答案：

【解析】

$$
\begin{aligned}
&(2)\ E[X(X+1)]=E(X^2+X)=E(X^2)+E(X),\\
&\text{而} E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2\\
&=\frac{1}{3}\cdot(-1-0)^2+\frac{1}{2}\cdot(0-0)^2+\frac{1}{6}\cdot(2-0)^2\\
&=1\\
&\text{因此} E[X(X+1)]=1+0=1.
\end{aligned}
$$

三、填空题

1. 设函数$y=e^{2x}$,则dy =

答案：

$2e^{2x}dx$

【解析】 $y'=\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$, 故$dy=y'dx=2e^{2x}dx.$

2. 函数$f(x)=x^3-6x$的单调递减区间为

答案：

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

【解析】

$f'(x)=3x^2-6$，令$f'(x)<0$，得$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

故$f(x)$的单调递减区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$$若函数f(x)=\begin{cases} x^2-2, x\le 0, \\ a=\sin x, x>0, \end{cases} 在x=0处连续，则a=$$

3.

答案：

【解析】

-2

由于 $f(x)在x=0处连续$，故有 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$，而 $f(0)=-2, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+\sin x)=a, 因此a=-2.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=$$

4.

答案：

1

$$x\to 0时，x^2\to 0, 故有\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1.$$

【解析】

$$\int(3x+2\sin x)dx=$$

5.

答案：

$$\frac{3}{2}x^2-2\cos x+C$$

【解析】

$$\int(3x+2\sin x)dx=\frac{3}{2}x^2-2\cos x+C$$

$$曲线y=\arctan(3x+1)在点(0,\frac{\pi}{4})处的斜率为$$

6.

答案：

【解析】

$\frac{3}{2}$

由题意可知 $y'=[arac\tan(3x+1)]'=\frac{3}{1+(3x+1)^2}$，故曲线在点 $(0,\frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为

$$y'\big|_{x=0}=\frac{3}{1+(3x+1)^2}\Big|_{x=0}=\frac{3}{2}.$$

7. $(\int_0^{2x}\sin t^2 dt)' =$

答案：

$2\sin(4x^2)$

【解析】 $\left(\int_0^{2x}\sin t^2 dt\right)' = \sin(2x)^2\cdot(2x)' = 2\sin(4x^2)$

8. $\int_{-\infty}^{1} e^x dx =$

答案：

e

【解析】 $\int_{-\infty}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^{1} = e - 0 = e.$

9. 区域$D = \{(x,y)|1\le x\le 2, 1\le y\le x^2\}$的面积为

答案：

$\frac{4}{3}$

【解析】 区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2-1)dx = (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}$

10.

方程$y^3 + \ln y - x^2 = 0$在点(x,y)的某领域确定隐函数 $y = y(x)$,则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} =$

答案：

【解析】

$\frac{1}{2}$

方程两边同时对 x 求导，得 $3y^2\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} - 2x = 0$,即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3+1}$, 所以故有

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^3+1}\Big|_{x=1} = \frac{2\times1\times1}{3\times1^3+1} = \frac{1}{2}.$$