

一、单选题

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2)$ 是 x 的 ()

1.
A. 高阶无穷小
B. 等价无穷小
C. 同阶非等价无穷小
D. 低阶无穷小

答案: A

【解析】

由题可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$, 故 $\ln(1+x^2)$ 是 x 的高阶无穷小量

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = ()$

2.
A. e^3
B. e^2
C. $e^{\frac{3}{2}}$
D. $e^{\frac{2}{3}}$

答案: C

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

【解析】

3. 设函数 $y^{(n-2)} = \sin x$, 则 $y^{(n)} = ()$

- A. $2x + y^2$
B. $-\cos x$
C. $\sin x$
D. $-\sin x$

答案: D

$$\text{令 } f(x) = y^{(n-2)} = \sin x, \quad f''(x) = y^{(n)} = -\sin x$$

【解析】

设函数 $f(x) = 3x^3 + ax + 7$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 $a = (\quad)$

4.

A. 9

B. 3

C. -3

D. -9

答案：D

【解析】函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，而 $f'(x) = 9x^2 + a$ ，故 $f'(1) = 9 + a = 0$ ，解得 $a = -9$ 。

不定积分 $\int 2 \cos 3x dx = (\quad)$

5.

A. $6 \sin 3x + C$

B. $\frac{2}{3} \sin 3x + C$

C. $\frac{1}{3} \sin 3x + C$

D. $\frac{1}{6} \sin 3x + C$

答案：B

$$\int 2 \cos 3x dx = \frac{2}{3} \int \cos 3x d3x = \frac{2}{3} \sin 3x + C$$

【解析】

函数 $\left(\int_0^x \sin^2 t dt \right)' = (\quad)$

6.

A. $\sin 2x$

□

B. $\sin^2 x$

C. $\cos^2 x$

D. $-\sin 2x$

答案：B

$$\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)' = \sin^2 x$$

【解析】

7. 设 $z = (y-x)^2 + \frac{1}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

A. $2(y-x) - \frac{1}{x^2}$

B. $2(y-x) - \frac{1}{x}$

C. $2(x-y)$

D. $2(y-x)$

答案: D

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-x)$$

【解析】

8. 二元函数 $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1$ 的驻点是 ()

A. $(0, 0)$

B. $(-1, 1)$

C. $(1, 0, 1)$

D. $(1, 1)$

答案: C

【解析】由题干可求得 $f_x(x, y) = 2x - 2$, $f_y(x, y) = 2y + 2$, 令 $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$, 解得 $x = 1$, $y = -1$, 即函数的驻点为 $(1, -1)$ 。

9. 下面四点中 $x + y - z + 2 = 0$ 在平面上的是 ()

A. $(-2, 1, 1)$

B. $(0, 1, 1)$

C. $(1, 0, 1)$

D. $(1, 1, 0)$

答案: A

【解析】把选项中的几个点带入平面方程，只有选项 A 满足方程，故选项 A 是平面上的点。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径为()

10.

A. 1/2

B. 1

C. 3/2

D. 2

答案：B

【解析】

由题可知 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1+1}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ ，因此级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$

二、简答题

计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$

1.

答案：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{x - \sin x} \right) = 6$$

【解析】

设函数 $f(x) = e + \frac{1}{2}x^2 - \sin x$ ，计算 $f'(1)$

2.

答案：

$$f'(1) = |-\cos|$$

【解析】

求函数 $y = x^2$ 在点 (1, 1) 处的切线方程：

3.

答案：

$$\text{切线方程：} 2x - y - 1 = 0$$

【解析】

求函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ 的单调区间

4.

答案：

$f(x)$ 单调增区间 $(-\infty, -1/3) \cup (1, +\infty)$
 $f(x)$ 单调减区间 $(-1/3, 1)$

【解析】

5. 求 $\int \frac{1}{x(x+2)} dx$

答案：

$$\frac{1}{2} [\ln |x| - \ln |x+2|] + c$$

【解析】

求微分方程 $y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{x}{1+x}$ 满足初值条件 $y|_{x=1} = \frac{1}{4}$ 的特解。

6.

答案：

$$y|_{x=1} = \frac{1}{4} \text{ 的特解为 } \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2(1+x)}$$

【解析】

计算 $\iint_D (x + y^2) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=0, y=x, x=1$ 所围成的闭区域。

7.

答案：

【解析】 $\iint_D (x + y^2) dx dy = 5/12$

证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1+x$ 。

8.

答案：

只需证明 $e^x - x - 1 > 0$

令 $f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x) = e^x - 1$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = e^x - 1 > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $x > 0$ 时为单调递增函数

只需证明 $f(x)$ 最小值 > 0

$\therefore f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

$\therefore x > 0$ 时, $f(x) > 0, e^x > 1+x$ 。

【解析】

三、填空题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = 1 + 2 = 3$$

【解析】

设函数 $f(x)$ 满足 $f'(1) = 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2.

答案:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1)}{2x} = 2f'(1) = 10$$

【解析】

设函数 $y = \frac{1}{x+1}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

3.

答案:

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \text{ 故有 } dy = y' dx = -\frac{1}{(1+x)^2} dx$$

【解析】

设曲线 $y = \frac{x}{4-x}$ 的水平渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4.

答案:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{x}{4-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} = -1, \text{ 因此曲线的水平渐近线为 } y = -1$$

【解析】

不定积分 $\int (x^2 + 3x^{\frac{1}{2}}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5.

答案:

$$\int (x^2 + 3x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{3} x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} + C$$

【解析】

定积分 $\int_{-1}^1 (1 + x \sin x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

6.

答案:

【解析】

令 $f(x) = x \sin x^2$, 有 $f(-x) = -x \sin x^2 = -f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是奇函数, 因此

$$\int_{-1}^1 (1 + x \sin x^2) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

7. 定积分 $\int_0^2 3^x dx =$ _____ .

答案:

$$\int_0^2 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^2 = \frac{3^2 - 1}{\ln 3} = \frac{8}{\ln 3}$$

【解析】

设 $z = x \tan(y^2 + 1)$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

8.

答案:

对 x 求偏导, 可将 $\tan(y^2 + 1)$ 看作是常数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan(y^2 + 1)$

【解析】

9. 微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解为 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____ .

答案:

【解析】

$$\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2dx, \int \frac{dy}{y} = \int -2dx \Rightarrow \ln |y| = -2x + C_1 \Rightarrow y = \pm e^{-2x+C_1}$$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 所以 $y = Ce^{-2x}$

10. 过点 $(1, 0, -1)$ 与平面 $3x - y - z + 2 = 0$ 平行的平面方程为

答案:

【解析】平面 $3x - y - z + 2 = 0$ 的法向量为 $(3, -1, -1)$, 所求平面与其平行, 故所求平面的法向量为 $(3, -1, -1)$, 由平面的点法式方程得所求平面方程为 $3(x-1) - (y-0) - (z+1) = 0$, 即 $3x - y - z - 4 = 0$ 。